Exercice 2 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$,$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| \leq 1\}$ et $a_1, ..., a_n$,$b_1, ..., b_n$ des éléments de $\mathbb{D}$. Montrer que :

$$\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$$

1.$\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose P_n : " $\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|$"

2. P_1 est vrai car $\forall (a_1, b_1) \in \mathbb{D}^2$,$|a_1 - b_1| \leq |a_1 - b_1|$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que P_n. On a :
$\left|\prod_{i=1}^{n+1} a_i - \prod_{i=1}^{n+1} b_i\right|$
$= \left|a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i\right|$
$= \left|a_{n+1}\prod_{i=1}^{n} a_i - b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i - b_{n+1}\prod_{i=1}^{n} b_i\right|$
$= \left|a_{n+1}\left(\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right) + \prod_{i=1}^{n} b_i \left(a_{n+1} - b_{n+1}\right)\right|$
$= |a_{n+1}|\left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + \left|\prod_{i=1}^{n} b_i\right| |a_{n+1} - b_{n+1}|$
$\leq \left|\prod_{i=1}^{n} a_i - \prod_{i=1}^{n} b_i\right| + |a_{n+1} - b_{n+1}|$ car $|a_{n+1}|$ et $|\prod_{i=1}^{n} b_i| \leq 1$ (car $\in \mathbb{D}$)
$\leq \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i| + |a_{n+1} - b_{n+1}|$ par P_n
$\leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i - b_i|$ Donc P_{n+1} vrai.

4. Par théorème de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, P_n.