Colles spé

N.E

April 5, 2022

Semaine 1

On note, pour $s \in \mathbf{R}$, $A_s = \{(x_n) \in (\mathbf{R})^{\mathbf{N}} | \sum\limits_{n \geq 0} x_n = s\}$

Déterminez $B = \{\sum x_i^2 | (x_n) \in A_s\}$

Semaine 2

1. Existence et valeur de $\sum\limits_{n \geq 0} \dfrac{\zeta(n) - 1}{2^n}$

2. Montrez que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{nn!} = \sum_{n \geq 1} \frac{H_n}{n!}$

Semaine 3

1. Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$ vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}, P(n) \in \mathcal{P}$. Montrer que P est constant.
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2$ vérifiant $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$. Montrer que f admet un point d'inflexion.

Semaine 4

1a. Soit $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

Que dire de f ?

b. Même question pour $f(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{f(x^n)}{3^n}$

2. Déterminer les c tels que $f(x) = c \sum_{k \geq 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$ soit difficile à résoudre, puis résoudre pour $c = 2$.

Semaine 5

0. Soit G un groupe de cardinal $2n$, montrer qu'il n'admet pas exactement 2 sous-groupes d'indice 2
1a. Soit A un anneau commutatif, $I \subset A$ un idéal. Montrer que

$$I \text{ maximal} \iff \forall a \in A \backslash I, I + aA = A$$

b. Montrer que I maximal $\Rightarrow I$premier
c. Donnez un exemple d'idéal premier.
d. Soit $A = \mathcal{C}^\infty$ l'anneau des fonction infiniment dérivable. On note $I = \{f \in A | f(0) = 0\}$. I est-il un idéal ? Principal? Premier ? Maximal ?

Semaine 6

1. Soit p premier. Montrer que, en notant $\displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} = \frac{u_p}{(p-1)!}$, on a $p^2 | u_p$.
2. L'ensemble des permutation de $\mathbf{N}$ est-il dénombrable ?
3. Que dire d'un groupe admettant un nombre fini (resp. dénombrable) de sous groupe ?

Semaine 7

Rien d'intéressant, exercice de niveau terminale.

Semaine 8

Soit $\mathbf{K}$ un corps algébriquement clos et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit f, g des endomorphismes de E. On dit que (f, g) est une paire de Weyl si $fg - gf = id$. On dit de plus qu'elle est irréductible si les seuls sous espaces stables par f et g sont $\{0\}$ et E. Classifier les paires de Weyl irréductibles.

Semaine 9

Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Discuter de la diagonabilisité de l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \\ M &\longmapsto M + tr(AM)B \end{aligned}$$

Dimension du commutant ?

Semaine 10

1. Soient $A, B \in \mathbf{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $rg(AB - BA) = 1$. Montrer que $Im(AB - BA) \subseteq \ker(AB - BA)$. Montrer plus généralement qu'on a $Im(AB - BA) \subseteq \ker((AB - BA)A^k)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

2. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice symétrique réelle et on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ses valeurs propres avec multiplicité. Montrer que

$$\sum_{i<j} a_{i,i} a_{j,j} \geq \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

Semaine 11

1. Soient $a_1, \cdots, a_n > 0$ tels que $\prod_{k=1}^n a_i = 1$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + t(a_i - 1)) \geq 1$$

2. Soit $f : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ continue vérifiant :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \lim_{n \to +\infty} f(nx) = 0$$

Montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$

3. Donner un exemple de forme linéaire non continue

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une constante K_n telle que

$$\frac{\mathrm{d}^{2n+2}}{\mathrm{dx}^{2n+2}} (1 + x^2)^{n+1/2} = K_n (1 + x^2)^{-n-3/2}$$

5. Caractérisez les fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ et $f(x) \leq x$.

Semaine 12

1. On note $E = \mathcal{C}^0([0, 1])$ muni de la norme infinie, et soient S, I, B l'ensemble des fonction surjective, injective et bijective respectivement de E. Nature topologique de S, I, B ? Adhérence de B ?

2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Montrer qu'il existe N une norme tq $X^n \longrightarrow P$ pour cette norme.

3. Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant le demi plan de partie réelle positif. Montrer que pour tout $R > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tq $\forall z, \Re(z) \geq 0, |\Im(z)| < R$ on ai $B(z, \varepsilon) \in \mathcal{O}$

Semaine 13

On dit qu'un ouvert $U \subseteq \mathbf{R}^2$ a la propriété (P) si pour toute suite de fermés (F_n) telle que $\bigcap_n F_n \subseteq U$, il existe n_0 tel que $\bigcap_{n \leq n_0} F_n \subseteq U$. Caractériser les U ayant (P).

Semaine 14

Soit $\mathcal{K}$ un compact non vide de $\mathbf{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique. Montrer qu'il existe une unique application 1-lipschitzienne de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ s'annulant sur $\mathcal{K}$, étant maximale dans l'ensemble de ces fonctions. On la note f.
Donner une CNS sur $\mathcal{K}$ pour que f soit C^2.

Semaine 15

Soit $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon $R \geq 1$, $a_n \in \mathbf{C}$.
1. On suppose que $\sum a_n$ converge, montrer que f est continue en 1 par valeur inférieures.

2. On suppose cette fois que f est continue en 1 par valeur inférieurs, et que $a_n = o(\frac{1}{n})$. Montrer que la série des (a_n) converge.

Semaine 16

On note $X_1, \cdots, X_n$ iid suivant la loi uniforme sur $\mathcal{P}([|1, m|])$. Loi de $Z = \text{card}(X_1 \bigcap \cdots \bigcap X_n)$?

Semaine 17

Exercices peu (pas) intéressants.

Semaine 18

1. Régularité et valeur de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2}dt$

2. On note $f(x) = \frac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))dt$[1].

a) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $x^2y'' + xy' + x^2y = 0$.
b) Montrer que si g est solution, g bornée au voisinage de 0 ssi g proportionnelle à f.

Semaine 19

Soit l'équation différentielle $X' = AX$ (à valeur vectoriel). On note $X_1, \cdots, X_n$ des solutions. Montrer que $rg(X_1, \cdots, X_n)$ est constant.

Semaine 20

1. Soit $n > 1$ entier, R^n muni d'un produit scalaire. On note $A \in S_n(\mathbf{R})$. Déterminer :

$$\sup_{x,y \in B(0,1)} \begin{vmatrix} < Ax|x > & < Ay|x > \\ < Ax|y > & < Ay|y > \end{vmatrix}$$

2. On note $A, B \in S_n(\mathbf{R})$, $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A (même notation pour B). Montrer que

$$\forall k \in [|1, n|],\ \lambda_k(A) + \lambda_1(B) \leq \lambda_k(A+B) \leq \lambda_k(A) + \lambda_n(B)$$

Semaine 21

1. On note $U \subseteq \mathbf{R}^n$ un ouvert, $a \in U$, f, g, h trois fonctions de U dans $\mathbf{R}$ continues. On suppose f, h différentiable en a et qu'on ai $f \leq g \leq h$ au voisinage de a. Montrer que g est différentiable en a.
2. On note E l'algèbre des fonction continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. On note φ une forme linéaire vérifiant

$$\varphi(fg) = f(0)\varphi(g) + g(0)\varphi(f)$$

Montrer que φ est nulle.

[1] il s'agit d'une fonction de Bessel