

$$\text{Calculer } S_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j)$$

Il suffit de distinguer les cas $j \leq i$ et $j \geq i$, et utiliser la linéarité de la somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min(i, j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i j + \sum_{j=i+1}^n i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^n (n-i)i \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n i^2 + \sum_{i=1}^n i \right) + n \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left(n + \frac{1}{2} - \frac{2n+1}{6} \right) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$