$$\text{Calculer } S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Commençons par simplifier $k\binom{n}{k}$:

$$\begin{aligned} k\binom{n}{k} &= k\frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{(Par Pascal)} \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \\ &= n\binom{n-1}{k-1} \end{aligned}$$

On en déduis $S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$

Par changement de variable on a : $S_n = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$

Et donc $S_n = n2^{n-1}$ par le binôme de Newton

Alternativement, en posant $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f_n : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (1+x)^n \end{aligned}$$

On remarque que $f_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_n = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}$

Et en particulier pour $x = 1$: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$