Exercice 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n \exp(x)}{n!} dx$.

1. Encadrer I_n pour montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

On remarque d'abord que $\forall x \in [0,1], (1-x) \geq 0$ et donc que $I_n \geq 0$

On a:

$$\begin{array}{rcl} & 0 \leq 1 - x \leq 1 & \forall x \in [0,1] \\ \Leftrightarrow & 0 \leq (1-x)^n \leq 1 & car\ n \in \mathbb{N}^* \\ \Leftrightarrow & 0 \leq \dfrac{(1-x)^n \exp(x)}{n!} \leq \dfrac{\exp(x)}{n!} & car \dfrac{\exp(x)}{n!} > 0\ \forall x \in [0,1] \end{array}$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{n!} = 0$, par encadrement et passage à la limite, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

2. Montrer que $I_n = I_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}$

$I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1} \exp(x)}{(n+1)!} dx$

On procède par IPP. On pose :

$$\begin{array}{ll} u' : x \to \exp(x) & u : x \to \exp(x) \\ v : x \to \dfrac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} & v' : x \to -\dfrac{(1-x)^n}{n!} \end{array}$$

Donc $I_{n+1} = -\displaystyle\int_0^1 -\frac{(1-x)^n \exp(x)}{n!} dx - \left[\frac{(1-x)^{n+1} \exp(x)}{(n+1)!}\right]_0^1 = I_n - \frac{1}{(n+1)!}$

Et donc $I_n = I_{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)!}$

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$

De la question précédente on en déduis l'égalité $\frac{1}{(n+1)!} = I_n - I_{n+1}$

De plus :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} (I_k - I_{k+1}) = 2 + I_1 - I_n$

par lemme de télescopage. De plus, $I_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)\exp(x) dx$

On procède par IPP. On pose :

$$\begin{array}{ll} u' : x \to \exp(x) & u : x \to \exp(x) \\ v : x \to (1-x) & v' : x \to -1 \end{array}$$

Donc $I_1 = -\int_0^1 -\exp(x)dx + [(1-x)\exp(x)]_0^1 = e - 2$

Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - I_n$

Au passage à la limite, avec la question 1, $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$, ce qui conclut l'exercice.