Exercice 2 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$

1. On a $a^b - b^a < 0 \Leftrightarrow e^{a\ln(b)} < e^{b\ln(a)}$
$\Leftrightarrow a\ln(b) < b\ln(a)$ car $e^x > 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{\ln(a)}{a} - \dfrac{\ln(b)}{b} < 0$ car $(a,b) \in \mathbb{R}_+^*$
Donc $a^b - b^a$ est du signe de $\frac{\ln(a)}{a} - \frac{\ln(b)}{b}$

2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$:
$f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} \geq 0 \ \forall x \in]0,e]$
Donc f est croissante sur $]0;e]$ et décroissante sur $[e,+\infty[$
Soit $0 < a < b \leq e$, alors $0 < f(a) < f(b) < e^{-1}$ car f croissante sur cet intervalle.
Et donc $a^b - b^a < 0$
De manière analogue pour $e \leq a < b$, $a^b - b^a > 0$, ce qui conclut.