Raisonnements non usuels, et démonstrations élégantes.

Nino Emery

March 28, 2021

Part I
Abstract

Le but de ce document est de répertorier et comprendre certains raisonnements qui à première vu ne semblent rien apporter mais qui se révèlent extrêmement ingénieux et efficace. Il n'a pas pour objectif, du moins pas premier, de fournir un arsenal d'outils pour les oraux, mais relève plus de ma fascination quand à certaines démonstrations qui m'ont fait perdre mes cheveux (quoi qu'il m'en reste encore beaucoup).Il n'empêche malgré tout que la plupart de ces exercices sont plus ou moins tiré d'exercices de taupes.

Je remercie avant tout mes différents professeur, en particulier de ma deuxième année de prépa, qui m'a montrer et permis d'en voir beaucoup plus que ce l'habitude et la fermeture des exos taupinale permet. Je remercie aussi mon groupe de colle qui m'a aider et soutenue à rédiger ce document, ainsi que permis de vivre une excellente année. Je serai ravis d'avoir des retours, voire d'autres raisonnements qui mériteraient leur place ici.

Contents

Part II
Raisonnements de Dénombrement

En réalité je pense qu'assez peu d'élèves apprécient réellement le dénombrement, hors du fait que c'est assez simple et demande peu d'effort. Pourtant cela permet de très beaux raisonnements.

1 Question d'avoir le bon nombre

On pourrait critiquer la présence de 'on en a le bon nombre' dans la catégorie 'Dénombrement', mais faute de mieux, ça y est.

1.1 Générateurs de Z/p^kZ

Exercice 1.1

Soit g un générateur de $(Z/p^2Z)^\times$, montrer que g engendre $(Z/p^kZ)^\times$ pour tout $k \geq 2$

Cette démonstration est dû à un ami, et je l'ai trouvé belle dans sa simplicité.

> *Solution.* On procède par récurrence, le cas $k = 2$ étant déjà traité.
> Soit g un générateur de $Z_{p^{k+1}}$, si on note $\tilde{g}$ la projection de $g \mod p^k$, alors $g = \tilde{g} + bp^k[p^{k+1}]$. Or $|\{\tilde{g} + bp^k | \tilde{g}$ générateur *et* $k \in [|0, p-1|]\}| = p\varphi(\varphi(p^k)) = \varphi(\varphi(p^{k+1}))$ ainsi on a tous les générateurs de $(Z/p^kZ)^\times$ et en particulier pour $b = 0$, g génère $(Z/p^kZ)^\times$

Remarque : Il faut avoir au préalable montré que les Z/p^kZ sont cycliques, ce qui n'est pas spécialement une tâche aisée.

Part III
Raisonnements Topologiques

Ceux qui me connaisse savent qu'en plus d'apprécier l'arithmétique et l'algèbre, je me suis découvert une passion pour la Topologie, et son utilisation incongru au grès des exercice m'a toujours impressionné, comme vous allez voir.

2 Question de densité

La topologie permet entre autre de traiter les questions de densité.

2.1 Densité des fonctions continue nulle part dérivable

Exercice 2.1

Montrer que l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ continue nulle part dérivable est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

C'est un exercice d'oral, qui n'est pas si dur avec une méthode traditionnelle à condition d'avoir une bonne idée, mais nous allons ici exposer une autre démonstration, à mon goût plus élégante.

Solution. Si $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \widehat{=} A$ est dérivable en un point x alors le taux $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$ est borné donc $\exists n \in \mathbb{N}/|f(x)-f(y)| \leq n|x-y|$ et la réciproque est claire. On se place dans l'espace vectoriel A muni de la norme de la convergence uniforme
On pose alors $F_n = f \in A | \exists x \in [0,1]\ tq\ \forall y \in [0,1], |f(x)-f(y)| \leq n|x-y|$.
•F_n est un fermé : il suffit de passer à la limite dans l'inégalité pour le voir.
•F_n est d'intérieur vide. En effet supposons $f \in F_n$ point intérieur, alors il existe $r > 0$ tq $B(f,r) \subset F_n$ et d'après le théorème de densité de Weierstrass, on peut supposer en prenant $0 < a < r$ que la boule est centré en un polynôme P. On construit alors une fonction affine par morceau $g \in B(P,a)$ tq $|g(x)-g(y)| > M|x-y|$. Ainsi en prenant $M = \sup\limits_{[0,1]}|P'|$,$|(P+g)(x)-(P+g)(y)| \geq (M+n)|x-y|$ et $P+g \in B(f,r)$ absurde donc il n'existe pas de point intérieur.
Ainsi, F_n est un fermé maigre, donc $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} F_n$ fermé maigre donc son complémentaire est dense d'après le lemme de Baire, d'où la conclusion.

3 Question d'ouverture d'esprit

La topologie est, surtout en prépa, avant tout l'étude ce qui est ouvert ou fermé, et parfois cela se révèle très utile.

3.1 Discriminant de polynôme de degré 4

Exercice 3.1

Soit $P = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$, montrer qu'il n'existe pas de polynôme $D \in \mathbb{R}[X, Y, Z, T]$ tel qu'on ai $D(a, b, c, d) \geq 0 \iff D$ scindé sur $\mathbb{R}$

Je dois avouer ne pas connaître la méthode attendu par l'examinateur là où je l'ai trouvé, mais mon professeur de spé m'a montré une méthode topologique assez originale.

Solution.