

Kholle de math semaine 12

Question de cours :
Croissance de la partie entière.

Exercices :**Exercice 1 :**

Déterminer si elle existe la borne supérieure de $\left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{p+1}, (n, p) \in \mathbb{N}^2 \right\}$

Exercice 2 : Montrer que pour tout n dans \mathbb{N}^* , on a
 $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$.

En déduire la valeur de $\left[\sum_{k=1}^{10000} \frac{1}{2\sqrt{k}} \right]$

Exercice 3 : Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide bornée, on définit $B = \{|x - y|, (x, y) \in A^2\}$.
Montrer que $\sup B$ existe et que $\sup(B) = \sup(A) - \inf(A)$

Exercice 4 : Soit n entier naturel non nul.

On pose $\varphi(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\lfloor \frac{t+k}{n} \right\rfloor$.

1. Montrer que : $\forall t \in [0, 1[, \varphi(t) = 0$
2. Exprimer $\varphi(t+1)$ en fonction de $\varphi(t)$.
3. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = [t]$.